相対性理論入門 3

自由粒子の運動量とエネルギー

解析力学の重要な原理は，物体はその座標と速度の関数であるラグランジアン L の時間についての積分，すなわち作用：

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t \tag{1}$$

を最小にする軌跡を描くというものである（最小作用の原理）．この原理に基づけば，L は Euler–Lagrange 方程式：

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=0 \tag{2}$$

を満たさなければならない．ここで $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ である．そして，この式が Newton の運動方程式と等価になるような L として，

$$L=\frac{1}{2}m\left|\boldsymbol{v}\right|^2-V \tag{3}$$

が見出された．

相対論においても，この最小作用の原理が成り立つとする．この仮定のもとに，“自由粒子についての” 相対論的な作用積分を考えよう．相対論では力学の法則は異なる慣性系の間で同じ，すなわち Lorentz 不変でなければならない．Lorentz 変換は座標変換であり，座標変換しても変わらない量はスカラー量である（“スカラー量とは，座標変換しても値の変わらない量のことである” と定義されている）ので，相対論的な作用 S は Lorentz 不変なスカラー量の積分となるはずである．ところで，自由粒子が有する Lorentz 不変なスカラー量は任意の事象間の世界線の間隔あるいはそれを定数倍したものである．したがって，自由粒子の作用積分は：

$$S=-\alpha\int_a^b \mathrm{d}s \tag{4}$$

ここで a，b は事象を表す．α は適当な定数である．なお負号は，世界線の長さには最大値があるが最小値がないこと（Minkowski 空間においては 2 点間を結ぶ線分は直線のときに最大の長さを持ち，その線分を曲げることによりいくらでも長さを短くすることができる）から，Sが最小値を取ることができるように導入したものである．

この S は Lorentz 不変であるため，特定の座標系のものに書き換えても値は変化せず，議論に影響は

ない．そこで，ある座標系 (x, y, z, t) における世界線の長さの 2 乗の式：

$$(\mathrm{d}s)^2 = c^2 (\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}y)^2 - (\mathrm{d}z)^2 \tag{5}$$

を変形し，物体の速度を $\boldsymbol{v}$ として得られる

$$\mathrm{d}s = c\sqrt{1 - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}}\mathrm{d}t \tag{6}$$

を用いて式 (4) を書き換えると，

$$S = -\alpha c \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}}\mathrm{d}t \tag{7}$$

となる．したがって，この座標系における Lagrangian は

$$L = -\alpha c\sqrt{1 - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}} \tag{8}$$

となる．

この α を決めよう．そのために，運動量は非相対論的極限 $|\boldsymbol{v}|/c \to 0$ においてNewton 力学の運動量 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ に近づく必要があることを使う．運動量は定義より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} && (9) \\ &= \frac{\alpha \dfrac{\boldsymbol{v}}{c}}{\sqrt{1 - \dfrac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}}} && (10) \end{aligned}$$

となる．式 (10) を展開して，

$$\boldsymbol{p} = \alpha \frac{\boldsymbol{v}}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2} + \cdots\right) \tag{11}$$

この中で，括弧内の $|\boldsymbol{v}|/c$ の 2 次以上の項を無視することにより，$\alpha = mc$ と決まる．これを式 (10) に代入して，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}}} && (12) \\ &= \gamma m \boldsymbol{v} && (13) \end{aligned}$$

となる．また，Lagrangian は式 (8) より，

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} \tag{14}$$

となる．

エネルギーについては，一般化座標で表した粒子の Hamiltonian が

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \tag{15}$$

であることから，これを Descartes 座標のベクトルで表して，式 (14) を用いることにより，

$$\begin{aligned} H &= \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} - L \\ &= \gamma m \left| \boldsymbol{v} \right|^2 + \frac{mc^2}{\gamma} \\ &= \gamma m \left(\left| \boldsymbol{v} \right|^2 + \frac{c^2}{\gamma^2} \right) \\ &= \gamma mc^2 \end{aligned} \tag{16}$$

が導かれる．これが $\boldsymbol{v}$ の速度で運動する粒子のエネルギーである．

式 (14) を Euler–Lagrange 方程式（式 (2)）に代入して，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{\left| \boldsymbol{v} \right|^2}{c^2}} \right) = 0 \tag{17}$$

すなわち，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{18}$$

となり，これは慣性の法則を表すことになる．

以上は自由粒子についての相対論的力学の基本であるが，ポテンシャルの場に置かれた場合は次の “相対性理論入門 4” で論じる．

2014 年 8 月 30 日　作成