相対性理論入門 2

Minkowski 空間

Lorentz 変換より，座標の差について次の式が成立する．

$$c^2\left(\mathrm{d}t\right)^2-\left(\mathrm{d}x\right)^2-\left(\mathrm{d}y\right)^2-\left(\mathrm{d}z\right)^2=c^2\left(\mathrm{d}t'\right)^2-\left(\mathrm{d}x'\right)^2-\left(\mathrm{d}y'\right)^2-\left(\mathrm{d}z'\right)^2$$

すなわち，

$$\left(\mathrm{d}s\right)^2=c^2\left(\mathrm{d}t\right)^2-\left(\mathrm{d}x\right)^2-\left(\mathrm{d}y\right)^2-\left(\mathrm{d}z\right)^2 \tag{1}$$

は Lorentz 変換に対して不変なもの（Lorentz 不変）である．2 点間の距離の 2 乗を Lorentz 不変な $\left(\mathrm{d}s\right)^2$ とするような空間が Minkowski 空間である．これは分かりにくいかもしれないが，三次元座標に時間軸を加えただけの Euclid 空間での 2 点間の距離の 2 乗は $\left(\mathrm{d}s\right)^2=c^2\left(\mathrm{d}t\right)^2+\left(\mathrm{d}x\right)^2+\left(\mathrm{d}y\right)^2+\left(\mathrm{d}z\right)^2$ であり，これは Lorentz 不変ではないことを考えると，Minkowski 空間の特殊性が理解できる．

Minkowski 空間のベクトル $\boldsymbol{V}$ を

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{e}_0ct+\boldsymbol{e}_1x+\boldsymbol{e}_2y+\boldsymbol{e}_3z \tag{2}$$

と表示するような基底ベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ は

$$\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_0=-\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1=-\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=-\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3=1 \tag{3}$$

の関係を満たす．これにより，ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{e}_0c\mathrm{d}t+\boldsymbol{e}_1\mathrm{d}x+\boldsymbol{e}_2\mathrm{d}y+\boldsymbol{e}_3\mathrm{d}z$ のノルムは式 (1) のようになり，Minkowski 空間の条件を満たしていることがわかる．

物体の運動は Minkowski 空間の中の線分で表される．これを世界線という．世界線の距離は式 (1) と同じ式になる．

$$\left(\mathrm{d}\tau\right)^2\equiv c^2\left(\mathrm{d}t\right)^2-\left(\mathrm{d}x\right)^2-\left(\mathrm{d}y\right)^2-\left(\mathrm{d}z\right)^2 \tag{4}$$

両辺を $(\mathrm{d}t)^2$ で割って，

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^2 &= c^2 - \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 \\
&= c^2 - v^2
\end{aligned}
\tag{5}
$$

これより，

$$
\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{c}{\gamma} \tag{6}
$$

が導かれる．世界線の上を移動する，すなわち物体と共に移動する座標系では $\gamma = 1$ となるため，

$$
\mathrm{d}\tau = c\mathrm{d}t \tag{7}
$$

である．したがって，τ は運動する物体の固有の時間と考えられるので，“固有時” と呼ばれる．

(x', y', z', t') の座標系の基底ベクトルの組を $\{\boldsymbol{e}'_0, \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ とすると，ある事象点を 2 つの座標系で表すことにより，

$$
\boldsymbol{e}_0 ct + \boldsymbol{e}_1 x + \boldsymbol{e}_2 y + \boldsymbol{e}_3 z = \boldsymbol{e}'_0 ct' + \boldsymbol{e}'_1 x' + \boldsymbol{e}'_2 y' + \boldsymbol{e}'_3 z'
$$

Lorentz 変換の逆変換を使って書き換えると，

$$
\boldsymbol{e}_0 c\gamma_\mathrm{c}\left(t' + \frac{w}{c^2}x'\right) + \boldsymbol{e}_1 \gamma_\mathrm{c}\left(x' + wt'\right) + \boldsymbol{e}_2 y' + \boldsymbol{e}_3 z' = \boldsymbol{e}'_0 ct' + \boldsymbol{e}'_1 x' + \boldsymbol{e}'_2 y' + \boldsymbol{e}'_3 z'
$$

整理して，

$$
\gamma_\mathrm{c}\left(\boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{e}_1 \frac{w}{c}\right) ct' + \gamma_\mathrm{c}\left(\boldsymbol{e}_0 \frac{w}{c} + \boldsymbol{e}_1\right) x' + \boldsymbol{e}_2 y + \boldsymbol{e}_3 z = \boldsymbol{e}'_0 ct' + \boldsymbol{e}'_1 x' + \boldsymbol{e}'_2 y' + \boldsymbol{e}'_3 z'
$$

これが任意の (x', y', z', t') について成り立つので，

$$
\boldsymbol{e}'_0 = \gamma_\mathrm{c}\left(\boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{e}_1 \frac{w}{c}\right) \tag{8}
$$

$$
\boldsymbol{e}'_1 = \gamma_\mathrm{c}\left(\boldsymbol{e}_0 \frac{w}{c} + \boldsymbol{e}_1\right) \tag{9}
$$

$$
\boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_2 \tag{10}
$$

$$
\boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_3 \tag{11}
$$

$\boldsymbol{e}'_0 \cdot \boldsymbol{e}'_1 = 0$ であることは容易に示される．また，

$$
\boldsymbol{e}'_0 \cdot \boldsymbol{e}'_0 = \gamma_\mathrm{c}^2\left(\boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 \frac{w^2}{c^2}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \gamma_{\mathrm{c}}^2 \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right) \\
&= 1 \qquad (12)
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}'_1 &= \gamma_{\mathrm{c}}^2 \left(\boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_0 \frac{w^2}{c^2} + \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1\right) \\
&= \gamma_{\mathrm{c}}^2 \left(\frac{w^2}{c^2} - 1\right) \\
&= -1 \qquad (13)
\end{aligned}
$$

となり，基底ベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}'_0, \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ も式 (3) と同様の正規直交系であることがわかる．$\boldsymbol{e}_0$，$\boldsymbol{e}_1$ の方向に ct，x 軸を，また $\boldsymbol{e}'_0$，$\boldsymbol{e}'_1$ の方向に ct'，x' 軸を取ると図 1 のようになる． ct' 軸は

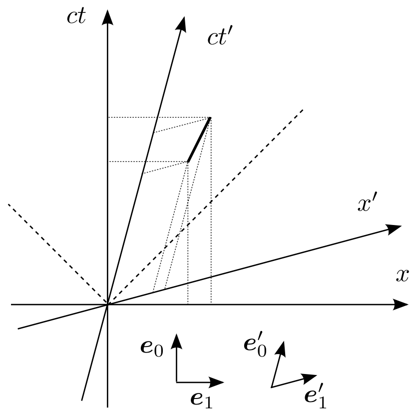

図 1: Minkowski 空間の ct，x 軸およびct'，x' 軸
(x', y', z', t') の座標系が (x, y, z, t) の座標系に対して x 軸方向に w の速度で進んでいる．y 軸と y' 軸，z 軸と z' 軸は一致し，いずれも ct，x 軸およびct'，x' 軸と直交する．点線は光の世界線．太い実線はある物体の世界線を表しており，それから各軸への射影を点線で示す．

$\theta = \tan^{-1}(w/c)$ だけ ct 軸から右回りに，また x' 軸は $\theta = \tan^{-1}(w/c)$ だけ x 軸から左回りに回転している．図 1 に示したある物体の世界線のこの図の中での距離や ct 成分（ct' 成分）および x 成分（x' 成分）は 2 つの座標系で異なる．しかし，この世界線の両端の座標を使って式 (1) によって計算した距離は同じになる．すなわち固有時の間隔は不変である．

Minkowski 空間における衝突の表現

この Minkowski 空間の中で “相対性理論入門 1” の衝突の問題を考えよう（図 2)． 物体 A，B の動きは図 2 の世界線 A，B で示される．これを (x, y, t) の座標系から見ると，等しい空間距離と等しい時間距離を動いて衝突する．これは yct 平面への射影（図には表示していないが自明であろう）に

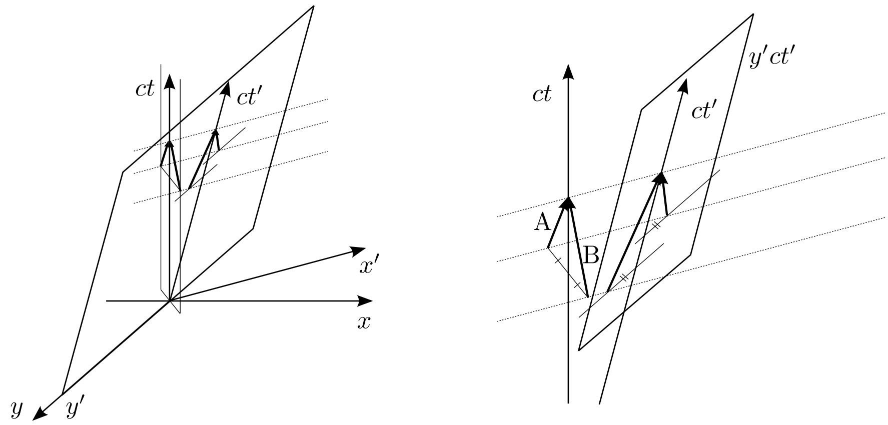

図 2: Minkowski 空間での衝突の表示

左に (x, y, t) の座標系と (x', y', t') の座標系を重ねて書いている．物体 A は xy 平面の第 3 象限に発し，物体 B は第 1 象限に発し，いずれも原点に向かい，原点で衝突する．その世界線（A，B）と，それらを x' 軸に沿って $y't'$ 平面に射影したものを示す．右は世界線の部分を拡大したもの．

よって y 軸方向の動きを考えても同じである．一方，(x', y', t') の座標系から見ると，$y'ct'$ 平面への射影によって y' 軸方向の動きを考えると，物体 A，B はy' 軸方向に同じ距離を動くが，物体 B の方が物体 A よりも長い時間をかけていることがわかる．したがって，y' 軸方向の動きの速さは B の方が遅く，y 軸（y' 軸）方向の非相対論的運動量の和が 0 にならないことがわかる．そこで，y 軸（y' 軸）方向の運動量を 0 にするためには，Lorentz 不変量であり，非相対論的極限で ct と一致する固有時 τ を t（t'）の代わりに使えばよいことがわかる．したがって，相対論的運動量は質点の座標を $\boldsymbol{r}$ として

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p} &= cm\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau} \\ &= cm\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \\ &= \gamma m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \\ &= \gamma m\boldsymbol{v} \qquad (14)\end{aligned}$$

となる．

（2014 年 8 月 24 日作成）