相対性理論入門 1

Lorentz 変換

光がどのような座標系に対しても同一の速さ c で進むことから導かれる座標の一次変換である．

(x', y', z', t') の座標系が (x, y, z, t) の座標系に対して x 軸方向に w の速度で進んでいる場合，座標系が一次変換で関係づけられるとすると，

$$x' = A\,(x - wt) \tag{1}$$

$$y' = y \tag{2}$$

$$z' = z \tag{3}$$

$$t' = Bx + Dt \tag{4}$$

が成立する．

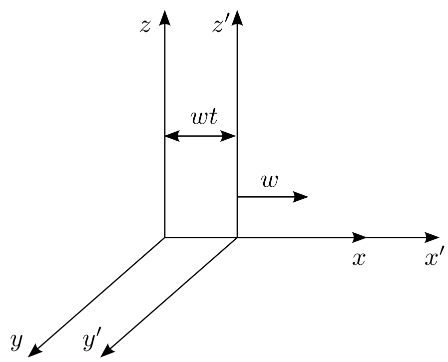

図 1: 相対速度 w で移動する 2 つの座標系

いま，2 つの座標系の原点が一致したとき，原点から光が発するとすると，(x, y, z, t) の座標系で原点に発した光が広がるのを表す式は

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \tag{5}$$

となり，一方，(x', y', z', t') の座標系で原点に発した光が広がるのを表す式は

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \tag{6}$$

となる．

式 (1)，(2)，(3)，(4) を式 (6) に代入して，

$$A^2\left(x-wt\right)^2+y^2+z^2=c^2\left(Bx+Dt\right)^2 \tag{7}$$

展開して整理すると，

$$\left(A^2-c^2B^2\right)x^2-2\left(wA^2+c^2BD\right)xt+y^2+z^2=\left(c^2D^2-w^2A^2\right)t^2$$

これが式 (5) と一致するので，

$$A^2-c^2B^2=1 \tag{8}$$

$$wA^2+c^2BD=0 \tag{9}$$

$$c^2D^2-w^2A^2=c^2 \tag{10}$$

式 (8)，(10) を式 (9) に代入することで B，D を消去し，整理すると，

$$\left(c^2-w^2\right)A^2=c^2 \tag{11}$$

x と x' が同符号であることから A の符号は正であるので，

$$A=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{w^2}{c^2}}} \tag{12}$$

式 (10) に代入して，

$$D^2=\frac{1}{1-\dfrac{w^2}{c^2}} \tag{13}$$

t と t' が同符号であることから D の符号は正であるので，

$$D=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{w^2}{c^2}}} \tag{14}$$

式 (8) より

$$B^2=\frac{\dfrac{w^2}{c^2}}{1-\dfrac{w^2}{c^2}} \tag{15}$$

B については，x' と t' を x と t に戻す逆変換の整合性を考えると，負号を取り，最終的に

$$x' = \frac{x - wt}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \tag{16}$$

$$t' = \frac{t - \frac{w}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \tag{17}$$

となる．これを Lorentz 変換という．

Lorentz 係数

$$\gamma_{\mathrm{c}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \tag{18}$$

を用いると，

$$x' = \gamma_{\mathrm{c}} \left(x - wt\right) \tag{19}$$

$$t' = \gamma_{\mathrm{c}} \left(t - \frac{w}{c^2}x\right) \tag{20}$$

となる．ただし，Lorentz 係数はある座標系において $\boldsymbol{v}$ の速度で運動する物体についてのもの

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}}} \tag{21}$$

が後ほどでてくるので，混同を避けるために座標系の変換についてのものには式 (18) のように c の添字を付けることにする．

相対論的運動量

解析力学において，空間が並進対称性を有しているときに保存される量が存在し，それが物体の質量と速度の積：

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \tag{22}$$

で表されるものであることが導かれる．この保存される量は運動量と呼ばれる．

しかしながら，相対論でこの運動量を用いると矛盾が生じる．そのために修正が必要となる．ただし，相対論的運動量は非相対論的な極限

$$\frac{|\boldsymbol{v}|}{c} \to 0 \tag{23}$$

において式 (22) に一致すること，またそのために質量と速度の積の次元を持つことが要求される．このことから，最も簡単な修正は $|\boldsymbol{v}|$ によって決まる係数 $f\left(|\boldsymbol{v}|/c\right)$（ただし $f(0) = 1$）を掛けるということ

になる．すなわち，

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} f\left(\frac{|\boldsymbol{v}|}{c}\right) \tag{24}$$

この係数 $f\left(|\boldsymbol{v}|/c\right)$ の関数形を以下のようにして決める．

同じ質量 m を持つ物体 A，B を座標系 (x, y) の xy 平面上に置き，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}} = (v_x, v_y)$ および $\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}} = (-v_x, -v_y)$ の速度で正面衝突させた結果，合体したとしよう（図 2）．このとき，係数 $f\left(|\boldsymbol{v}|/c\right)$ は等しいので運動量の和は 0 であり，衝突後，合体した物体は動いていない．

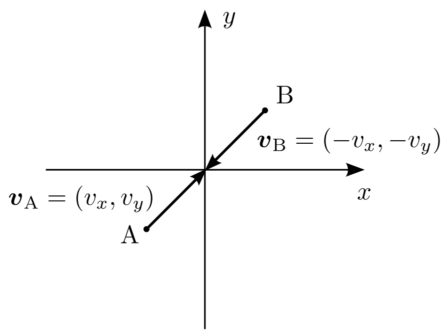

図 2: 同じ質量を持つ物体の正面衝突

この衝突を x 軸方向に $(v_x, 0)$ で動いている座標系 (x', y') で観察すると，衝突後の合体した物体は y' 軸方向（y 軸方向と同じ）には動いていないはずである．したがって，式 (24) より y' 軸方向の運動量は 0 のままである．新しい座標系でのこれらの物体の速度 $\boldsymbol{v}'_{\mathrm{A}}$ および $\boldsymbol{v}'_{\mathrm{B}}$ は Lorentz 変換を使って，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}'_{\mathrm{A}} &= \left(\frac{x'_{\mathrm{A}}}{t'}, \frac{y'_{\mathrm{A}}}{t'}\right) \\
&= \left(\frac{x_{\mathrm{A}} - v_x t}{t - \dfrac{v_x}{c^2}x_{\mathrm{A}}}, \frac{y_{\mathrm{A}}}{\gamma_{\mathrm{c}}\left(t - \dfrac{v_x}{c^2}x_{\mathrm{A}}\right)}\right) \\
&= \left(0, \frac{v_y}{\gamma_{\mathrm{c}}\left(1 - \dfrac{v_x^2}{c^2}\right)}\right) \qquad (25) \\
\boldsymbol{v}'_{\mathrm{B}} &= \left(\frac{x'_{\mathrm{B}}}{t'}, \frac{y'_{\mathrm{B}}}{t'}\right) \\
&= \left(\frac{x_{\mathrm{B}} - v_x t}{t - \dfrac{v_x}{c^2}x_{\mathrm{B}}}, \frac{y_{\mathrm{B}}}{\gamma_{\mathrm{c}}\left(t - \dfrac{v_x}{c^2}x_{\mathrm{B}}\right)}\right) \\
&= \left(-\frac{2v_x}{1 + \dfrac{v_x^2}{c^2}}, -\frac{v_y}{\gamma_{\mathrm{c}}\left(1 + \dfrac{v_x^2}{c^2}\right)}\right) \qquad (26)
\end{aligned}$$

となる．ここで，y 成分に v_x が入っていることに注意しよう．また，各々の速度の大きさは

$$|\boldsymbol{v}'_{\mathrm{A}}| = \frac{v_y}{\gamma_{\mathrm{c}}\left(1 - \dfrac{v_x^2}{c^2}\right)} \tag{27}$$

$$|\boldsymbol{v}'_{\mathrm{B}}| = \frac{\sqrt{4\gamma^2 v_x^2 + v_y^2}}{\gamma_{\mathrm{c}}\left(1 + \dfrac{v_x^2}{c^2}\right)} \tag{28}$$

である．

y 軸方向の運動量が新しい座標系でも 0 となることから，

$$m\frac{v_y}{\gamma_{\mathrm{c}}\left(1 - \dfrac{v_x^2}{c^2}\right)} f\left(\frac{|\boldsymbol{v}'_{\mathrm{A}}|}{c}\right) - m\frac{v_y}{\gamma_{\mathrm{c}}\left(1 + \dfrac{v_x^2}{c^2}\right)} f\left(\frac{|\boldsymbol{v}'_{\mathrm{B}}|}{c}\right) = 0$$

となる．この式を変形して，

$$\frac{f\left(\dfrac{|\boldsymbol{v}'_{\mathrm{A}}|}{c}\right)}{f\left(\dfrac{|\boldsymbol{v}'_{\mathrm{B}}|}{c}\right)} = \frac{1 - \dfrac{v_x^2}{c^2}}{1 + \dfrac{v_x^2}{c^2}} \tag{29}$$

また，式 (27)，(28) より，

$$\frac{\sqrt{1 - \dfrac{|\boldsymbol{v}'_{\mathrm{B}}|^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \dfrac{|\boldsymbol{v}'_{\mathrm{A}}|^2}{c^2}}} = \frac{1 - \dfrac{v_x^2}{c^2}}{1 + \dfrac{v_x^2}{c^2}} \tag{30}$$

これらより，

$$\frac{f\left(\dfrac{|\boldsymbol{v}'_{\mathrm{A}}|}{c}\right)}{f\left(\dfrac{|\boldsymbol{v}'_{\mathrm{B}}|}{c}\right)} = \frac{\sqrt{1 - \dfrac{|\boldsymbol{v}'_{\mathrm{B}}|^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \dfrac{|\boldsymbol{v}'_{\mathrm{A}}|^2}{c^2}}} \tag{31}$$

$|\boldsymbol{v}'_{\mathrm{B}}|/c = 0$ を取り，$f(0) = 1$ を用いて，

$$f\left(\frac{|\boldsymbol{v}'_{\mathrm{A}}|}{c}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{|\boldsymbol{v}'_{\mathrm{A}}|^2}{c^2}}} \tag{32}$$

よって，速度 $\boldsymbol{v}$ で動く物体の運動量 $\boldsymbol{p}$ は

$$\boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{v} \tag{33}$$

となる．なお，γ は式 (21) の定義によるものであり，座標系間の相対速度で定義された Lorentz 係数（式 (18)）とは異なるものであることに注意することが必要である．

相対論的な運動量とエネルギーの関係

相対論において，v の速さで運動する質量 m の物体の運動エネルギー K を求めてみよう．

力の働く方向に x 軸を取り，物体の速さを u とすると，

$$\mathrm{d}E = F\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}p \\
&= u\mathrm{d}p \\
&= u\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u \\
&= u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{mu}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u
\end{aligned}
\tag{34}
$$

したがって，K はこの物体の速さを0 から v まで増加させるときに必要なエネルギーとなるので，

$$
\begin{aligned}
K &= \int_0^v \frac{mu}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u \\
&= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 \\
&= \gamma mc^2 - mc^2
\end{aligned}
\tag{35}
$$

この式より，γmc^2 を v の速さで運動する質量 m の物体が持つ全エネルギーと解釈すると，辻褄が合うことがわかる．しかしながら，他の可能性，たとえば全エネルギーが $\gamma mc^2 + \mathrm{const}$ であっても式 (35) が成立するので，Einstein（1946 年）はエネルギーが質量に変換される系を考えた．

いま，質量 m の物体の両側から等しく $\epsilon/2$ のエネルギーを持つ光が当たって物体に吸収されるとする（図 3 左）．これを下向きに v の速さで移動する座標系で観測すると，物体の両側の斜め下から進んできた光が物体に吸収されることになる（図 3 右）．

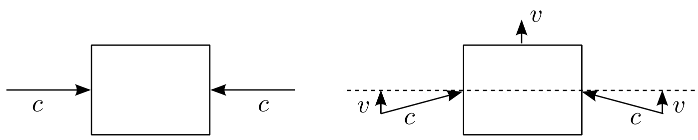

図 3: 光の吸収

Maxwell の方程式から導かれるように，それぞれの光は

$$
p = \frac{\epsilon}{2c} \tag{36}
$$

の運動量を持ち，その縦方向の成分は

$$
\frac{v}{c}p = \frac{v\epsilon}{2c^2} \tag{37}
$$

であるので，物体は

$$\frac{v\epsilon}{c^2} \tag{38}$$

だけの運動量を得ることになる．ところが物体の速さは光の吸収前後で変わらないので，物体の質量が増加すると考えなければ説明が付かないことになる．そこで，その増加分を Δm とすると，式 (33) より，

$$\gamma mv + \frac{v\epsilon}{c^2} = \gamma\left(m + \Delta m\right)v \tag{39}$$

変形して，

$$\epsilon = \gamma \Delta mc^2 \tag{40}$$

ϵ は吸収された光のエネルギーであるため，このことから，エネルギー ϵ が$\gamma\Delta mc^2$ に変換されたこと，すなわち，γmc^2 を運動する質量 m の物体の全エネルギーと考えてよいことがわかる．

さらに，γmc^2 と mc^2 の間には以下に示す関係がある．

式 (21) を書き換えて，

$$\gamma^2 - \gamma^2\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2} = 1 \tag{41}$$

両辺に m^2c^4 を掛けて整理すると，

$$\left(\gamma mc^2\right)^2 = \left(mc^2\right)^2 + c^2\gamma^2m^2\left|\boldsymbol{v}\right|^2 \tag{42}$$

この式自体は γ の定義と等価なものであるが，いま，$\gamma m\boldsymbol{v}$ が運動する物体の運動量，γmc^2 が運動する物体の全エネルギーということがわかったので，それぞれを $\boldsymbol{p}$ および E で表すと，

$$E^2 = \left(mc^2\right)^2 + c^2\left|\boldsymbol{p}\right|^2 \tag{43}$$

となり，物理的意味を有したものになる．ここで，$m = 0$ とすると，

$$E = c\left|\boldsymbol{p}\right| \tag{44}$$

となり，確かに Maxwell の方程式から導かれる光のエネルギーとなる．光は質量 0 の粒子と考えることにより，式 (43) が物質と光の両方に適用できることになり，光と物質を統一的に捉えることが可能になる．

以上は，初等的な方法で相対性理論の基本的なことがらを説明したものであるが，このままではいくつかの疑問が湧いてくるであろう．まず，式 24 では相対論的運動量を古典論的運動量に係数を掛けることで補正を行っているが，係数を掛けるだけでよいという根拠が明確ではない．また，相対論的運動量保存則は特殊な例についての考察によって導出しているが，これを一般化できるかどうかが明確ではない．さらに，エネルギーのところでは，力というものが相対論的に明確にされていない．これらはより進んだ理論で考える必要がある．次の “相対性理論入門 2” ではまず Minkowski 空間について考えよう．

2014 年 8 月 23 日	作成.
2014 年 8 月 30 日	最後の段落を追加.