

Ⅰ ~ Ⅲ の解答は、すべて解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

解答にあたっては次の点に注意しなさい。

(1) 解答用紙には、特に指示がなければ、答えのみを記入しなさい。計算過程を示す必要はありません。

(2) 答えはすべて解答しなさい。

【問題例】方程式 $(x - 1)(x - 3) = 0$ を解きなさい。

【解答例】 $x = 1, 3$

(3) 場合分けが必要だと考えられる場合は、各自で判断して解答しなさい。

【問題例】 a を与えられた実数とする。方程式 $ax = 1$ を解きなさい。

【解答例】 $a \neq 0$ のとき、 $x = \frac{1}{a}$ 。 $a = 0$ のとき、解なし。

(4) 答えは、

- 根号を含む場合は、根号の中に現れる自然数が最小になる形にする
- 分数はそれ以上約分できない形にする
- 分数の分母は有理化する

など、簡潔な形で解答しなさい。

I 次の空欄 ア ~ カ にあてはまる数を答えなさい。 [配点 30]

(1) 定積分 $\int_{-1}^1 |x(x-2)| dx$ の値は ア である。

(2) k を実数の定数とする。2次不等式 $x^2 + 4x + k \leq 0$ の解が

$$k \leq x \leq -k - 4$$

であるとき、 k の値は イ である。

(3) YAKUGAKU の 8 文字すべてを使ってできる文字列は ウ 通りあり、この 8 文字から 2 文字を使ってできる文字列は エ 通りある。

(4) 三角形 ABC の辺 AB を 3:1 に内分する点を D、三角形 ABC の重心を G とする。このとき、 $\overrightarrow{DG} = \text{オ} \overrightarrow{AB} + \text{カ} \overrightarrow{AC}$ である。

(下書き用紙)

Ⅱ 次の問いに答えなさい。

[配点 36]

(1) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする. $\tan \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$ のとき, $\sin \theta$ の値を答えなさい.

(2) 同一平面上において, 異なる 2 定点 P, Q と 2 直線 l, m を考える. l は P を, m は Q を通り, l と m は垂直に交わっている. $l \perp m$ の条件を満たしながら, P を中心に l が回転するとき, l と m の交点はどのような軌跡を描くか, 式や図を用いずに解答欄の文を完成させなさい. 解答にあたっては, 面接試験を想定し, 数学の確かな知識を持っている人に, 簡潔に口頭で伝えることを前提に答えなさい.

(3) $\alpha = \sqrt{3} - 2$ のとき, 次の問いに答えなさい.

(i) α を解にもつ 2 次方程式を 1 つ答えなさい. ただし, 係数は整数とする.

(ii) $\alpha^3 + 6\alpha^2 + 9\alpha + 12$ の値を答えなさい.

(4) a を実数の定数として, 次の 2 つの不等式を考える.

$$\begin{cases} 4 \log_4(x+2) - \log_2(x+6) \leq 1 & \dots\dots \textcircled{1} \\ 2^{2x} - 2^{x-a} \geq 0 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

(i) ①を満たす x の値の範囲を答えなさい.

(ii) ①と②をともに満たす x が存在するような a の最小値を答えなさい.

(下書き用紙)

Ⅲ 次の問いに答えなさい。

[配点 34]

(1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x$ とし、関数 $y = f(x)$ のグラフを C とする。また、 p を 0 でない実数とし、 C 上の点 $P(p, f(p))$ における C の接線を l 、 C と l の共有点のうち P でない方を Q とする。

(i) l の方程式を p を用いて表しなさい。

(ii) Q の x 座標を p を用いて表しなさい。

(iii) p の値の範囲が $p \geq 1$ であるとき、線分 PQ の長さの 2 乗の最小値を答えなさい。

(2) 数列 $\{a_n\}$ は初項 2、公比 4 の等比数列であり、数列 $\{b_n\}$ は初項 1、公比 8 の等比数列である。また、 N を自然数とし、整数の集合 A, B を

$$A = \{a_n \mid n = 1, 2, \dots, N\}$$

$$B = \{b_n \mid n = 1, 2, \dots, N\}$$

とする。必要であれば、

$$\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771, \log_{10} 7 = 0.8451$$

として、以下の設問に答えなさい。

(i) A に 10 桁の整数が属するときの最小の N を答えなさい。

(ii) $A \cap B$ の要素の個数が 2 以上となる最小の N を答えなさい。

(iii) $N = 33$ のとき、 $A \cup B$ の要素の個数を答えなさい。

(下書き用紙)

(下書き用紙)