

## 数学 後期解答例

[1]

(1) i)  $\frac{9}{29}$

ii)  $n$  人の選び方は,  ${}_{30}C_n$  通り. (これらは同様に確からしい) 選んだ  $n$  人の中に満点を取った者が 1 人もいないのは,  ${}_{28}C_n$  通り.  $P(n)$  は余事象を考えて,

$$P(n) = 1 - \frac{{}_{28}C_n}{{}_{30}C_n} = 1 - \frac{(30-n)(29-n)}{30 \cdot 29}.$$
$$P(n) \geq \frac{1}{2} \iff 1 - \frac{(30-n)(29-n)}{30 \cdot 29} \geq \frac{1}{2}$$

より,

$$(30-n)(29-n) \leq 435.$$

左辺を  $f(n)$  とおくと,  $f(n) = (n-30)(n-29)$  となり,  $1 \leq n \leq 28$  において  $f(n)$  は減少する.

$$f(8) = 462 > 435, f(9) = 420 < 435.$$

よって,  $P(n) \geq \frac{1}{2}$  を満たす最小の  $n$  は  $n = 9$ .

[1]

(2) i)  $z = 3 + \sqrt{3} + (1 + 2\sqrt{3})i$

ii)  $\alpha = 1 + 2i, \beta = 5$  とおき, 与式を変形して,

$$\frac{z - \alpha}{z - \beta} + \overline{\left(\frac{z - \alpha}{z - \beta}\right)} = 0$$

$$\iff \frac{z - \alpha}{z - \beta} \text{ は } 0 \text{ または純虚数}$$

$$\iff \frac{\alpha - z}{\beta - z} = ti \quad (t \text{ は実数})$$

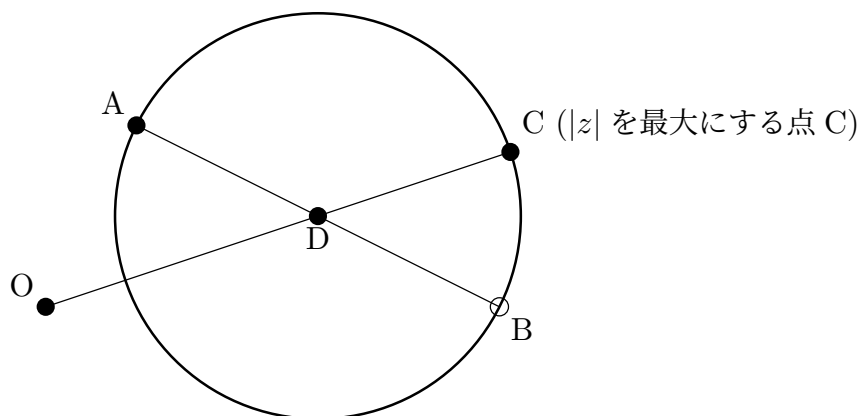
$$\iff z = \alpha \text{ または } \arg(\alpha - z) - \arg(\beta - z) = \pm \frac{\pi}{2} \quad (z \neq \alpha, \beta)$$

$$\iff C = A \text{ または } CA \perp CB.$$

よって, 点  $C$  の軌跡は線分  $AB$  を直径とする円. (点  $B$  を除く)  $O(0)$  とし, 円の中心を  $D$  とすると,  $D(3 + i)$  により  $OD = \sqrt{10}$ . 半径は

$$\frac{AB}{2} = \frac{|\beta - \alpha|}{2} = \sqrt{5}.$$

下の図より, 3 点  $O, D, C$  が, この順に一直線上に並ぶとき  $|z|$  は最大となる. 最大値は  $\sqrt{5} + \sqrt{10}$ .



[2]

曲線  $C$  を直交座標に関する方程式で表す.

$$\text{直交座標 } (x, y) \iff \text{極座標 } (r, \theta)$$

とする.  $r = \frac{2}{1 - \cos \theta} > 0$ . また,  $0 < \theta < \pi$  より  $y = r \sin \theta > 0$ . 極方程式を変形して

$$\begin{aligned} r - r \cos \theta = 2 &\iff \sqrt{x^2 + y^2} - x = 2 \\ &\iff x^2 + y^2 = (x + 2)^2 \text{ かつ } x \geq -2 \\ &\iff x = -1 + \frac{y^2}{4} \dots\dots (*) \end{aligned}$$

曲線  $C$  は  $(*)$  かつ  $y > 0$  で表される.

(1)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{2}{y}.$$

点  $P$  すなわち  $y = r \sin \theta$  における接線  $l$  の傾きは

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{r \sin \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$$

となる.

(2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \tan \frac{\theta}{2}. \quad \left( 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ より } \sin \frac{\theta}{2} \neq 0 \right)$$

$l$  と  $x$  軸の正方向となす角は  $\frac{\theta}{2}$  となり,  $\angle OQR = \frac{\theta}{2}$ .

(3) 半直線  $OP$  と  $x$  軸のなす角は  $\theta$  であること, および (2) の結果より  $\angle QPO = \frac{\theta}{2}$ .  $\triangle OPQ$  は二等辺三角形で  $OP = r = OQ$ . 直角三角形  $ORQ$  において  $OR = OQ \tan \frac{\theta}{2} = r \tan \frac{\theta}{2}$ .

$$\frac{OQ}{OR^2} = \frac{r}{r^2 \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{r \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1 - \cos \theta}{2 \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \cos^2 \frac{\theta}{2}.$$

$$\frac{OQ}{OR^2} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \rightarrow 1 \quad (\theta \rightarrow +0)$$

となり, 極限值 1 が得られる.

[3]

- (1)  $\overrightarrow{PA} = (2, 0, -3)$  より  $|\overrightarrow{PA}| = \sqrt{13}$ .  $AR$  は球の半径で  $AR = 1$ .  $AR \perp PR$  であるから,  $\triangle ARP$  において三平方の定理により,

$$PR = \sqrt{PA^2 - AR^2} = 2\sqrt{3}.$$

よって,

$$\cos \theta = \frac{PR}{PA} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PR} = (\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RA}) \cdot \overrightarrow{PR} = |\overrightarrow{PR}|^2 + \overrightarrow{RA} \cdot \overrightarrow{PR}.$$

$|\overrightarrow{PR}|^2 = 12$ ,  $\overrightarrow{RA} \perp \overrightarrow{PR}$  より  $\overrightarrow{RA} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$  であるから,  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PR} = 12$  を得る.

- (2) 全ての点  $Q$  に対し,  $\overrightarrow{PA}$  と  $\overrightarrow{PQ}$  のなす角は  $\theta$  であるから,

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} = |\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PQ}| \cos \theta.$$

$\overrightarrow{PA} = (2, 0, -3)$  と  $\overrightarrow{PQ} = (x, y, -4)$  により,

$$2x + 12 = \sqrt{13} \sqrt{x^2 + y^2 + 16} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}.$$

よって,

$$\frac{x+6}{\sqrt{3}} = \sqrt{x^2 + y^2 + 16}.$$

これを変形し,

$$x \geq -6 \text{ かつ } \frac{(x+6)^2}{3} = x^2 + y^2 + 16. \dots\dots (*)$$

(\*) より,  $\frac{(x-3)^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$  が得られる.  $y$  の実数条件から,

$$\frac{y^2}{2} = 1 - \frac{(x-3)^2}{3} \geq 0.$$

これを解いて  $3 - \sqrt{3} \leq x \leq 3 + \sqrt{3}$  となり, (\*) は  $x \geq -6$  をみたす.

[4]

(1)

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = - [\log |\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \log 2.$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( -1 + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = [-x + \tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

(2)  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$  において,  $y = \tan x \cdots \cdots (*)$ ,  $y = \frac{4}{\pi}x$  のグラフはともに原点と点  $(\frac{\pi}{4}, 1)$  を通る.  $(*)$  は  $y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} \geq 0$  より下に凸. よって,  $\tan x \leq \frac{4}{\pi}x$ .  $\tan x \geq 0$  であるから,  $0 \leq \tan^n x \leq \left(\frac{4}{\pi}x\right)^n$ . 等号はそれぞれ常には成立しないので,

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx < \left(\frac{4}{\pi}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n dx = \frac{\pi}{4(n+1)}.$$

$(0 <) I_n < \frac{\pi}{4(n+1)}$  が示された.

(注) 「 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$  において,  $y = \tan x \cdots (*)$ ,  $y = \frac{4}{\pi}x$  のグラフを描き,  $(*)$  は下に凸だから, グラフより  $\tan x \leq \frac{4}{\pi}x$  である。」(答案の例)  
 $y''$  の議論がなくても, 上のような答案記述で満点としました.

(3)  $N$  を自然数とし,

$$S_N = \sum_{n=1}^N \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\tan x)^n (1 - \tan^2 x) dx$$

とする. ( $S_N$  は無限級数の部分和)

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{(-1)^n \tan^n x - (-1)^n \tan^{n+2} x\} dx \\ &= \sum_{n=1}^N \left\{ (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx - (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x dx \right\} \\ &= \sum_{n=1}^N \{(-1)^n I_n - (-1)^{n+2} I_{n+2}\} \\ &= -I_1 + I_2 - (-1)^{N+1} I_{N+1} - (-1)^{N+2} I_{N+2}. \end{aligned}$$

(2) から  $0 < I_N < \frac{\pi}{4(N+1)}$ .  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4(N+1)} = 0$  であるから, はさみうちの原理により  $\lim_{N \rightarrow \infty} I_N = 0$ . よって,  $\lim_{N \rightarrow \infty} I_{N+1} = 0$ ,  $\lim_{N \rightarrow \infty} I_{N+2} = 0$  となり,  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = -I_1 + I_2$ . 以上より無限級数の和  $-\frac{1}{2} \log 2 + 1 - \frac{\pi}{4}$  が得られる.