

数学 前期解答例

[1]

(1) 数学的帰納法で証明する.

$n = 1$ のとき $a_1 = 2 \geq 2$ で成立する.

$n = k$ のとき成立を仮定する. (k は自然数) このとき $a_k + 2 > 0$ であるので,

$$a_{k+1} - 2 = \frac{2a_k + 5}{a_k + 2} - 2 = \frac{1}{a_k + 2} \geq 0$$

より, $a_{k+1} \geq 2$ が成り立つ. 従って, $n = k + 1$ のときも成立する.

以上より, 全ての自然数 n に対し $a_n \geq 2$ が成り立つことが示された.

(2)

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \sqrt{5} &= \frac{2a_n + 5}{a_n + 2} - \sqrt{5} \\ &= \frac{2 - \sqrt{5}}{a_n + 2} (a_n - \sqrt{5}) \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

ここで, すべての自然数 n に対して $a_n \geq 2$ であるので, $\frac{2 - \sqrt{5}}{a_n + 2} < 0$ である.

よって, (*) により $a_n - \sqrt{5} < 0$ のとき $a_{n+1} > \sqrt{5}$ であり, また, $a_n - \sqrt{5} > 0$ のとき $a_{n+1} < \sqrt{5}$ が成り立つ.

(3) (*) の両辺の絶対値をとり,

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - \sqrt{5}| &= \left| \frac{2 - \sqrt{5}}{a_n + 2} \right| |a_n - \sqrt{5}| \\ &= \frac{\sqrt{5} - 2}{a_n + 2} |a_n - \sqrt{5}| \end{aligned}$$

を得る. また, $a_n \geq 2$ により

$$0 < \frac{\sqrt{5} - 2}{a_n + 2} \leq \frac{\sqrt{5} - 2}{4}$$

を得る. 以上より,

$$|a_{n+1} - \sqrt{5}| \leq \frac{\sqrt{5} - 2}{4} |a_n - \sqrt{5}|$$

となる.

(4) (3) の式を繰り返し使って,

$$|a_n - \sqrt{5}| \leq \left(\frac{\sqrt{5} - 2}{4} \right)^{n-1} |a_1 - \sqrt{5}|$$

を得る．よって，

$$0 \leq |a_n - \sqrt{5}| \leq \left(\frac{\sqrt{5} - 2}{4} \right)^{n-1} (\sqrt{5} - 2) = 4 \left(\frac{\sqrt{5} - 2}{4} \right)^n$$

である．また， $0 < \frac{\sqrt{5} - 2}{4} < 1$ より，

$$4 \left(\frac{\sqrt{5} - 2}{4} \right)^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるので，はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - \sqrt{5}| = 0$$

を得る．よって， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{5}$ となる．

[2]

(1) 最小値は $3\sqrt{2}$. $P(\frac{7}{4}, 0, \frac{13}{4})$.

(2) zx 平面に関して点 A と対称な点を C , yz 平面に関して点 B と対称な点を D とする. $C(2, -1, 3)$, $AP = CP$. また, $D(-1, 3, 4)$, $BQ = DQ$.

$$AP + PQ + BQ = CP + PQ + QD \geq CD.$$

等号成立は直線 CD 上に点 P , 点 Q があるときで, 最小値は $CD = \sqrt{26}$.

このときの点 P , 点 Q の座標を求める. t をパラメータとして, 直線 CD の方程式は

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= \overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{CD} \\ &= (2, -1, 3) + t(-3, 4, 1) \\ &= (2 - 3t, -1 + 4t, 3 + t).\end{aligned}$$

点 P は zx 平面上にあるので, $y = -1 + 4t = 0$ より $t = \frac{1}{4}$. このとき $P(\frac{5}{4}, 0, \frac{13}{4})$.

同様に点 Q について, $x = 2 - 3t = 0$ より $t = \frac{2}{3}$. $Q(0, \frac{5}{3}, \frac{11}{3})$.

[3]

(1) 関数 $h(x)$ について

$$h(x) = \left(\frac{e^{x-a}}{2} - x \right) + \frac{e^{-x+a}}{2} + b = e^x \left(\frac{e^{-a}}{2} - \frac{x}{e^x} \right) + \frac{e^a}{2} \cdot e^{-x} + b.$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty$ であり, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$ より $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-a}}{2} - \frac{x}{e^x} \right) = \frac{e^{-a}}{2}$. よって,
 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \left(\frac{e^{-a}}{2} - \frac{x}{e^x} \right) = +\infty$. また $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^a}{2} \cdot e^{-x} = 0$ から $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = +\infty$ である.

次に

$$h(x) = \frac{e^{-a}}{2} \cdot e^x + \frac{e^a}{2} \cdot e^{-x} - x + b.$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ および $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ より, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{-a}}{2} \cdot e^x \right) = 0$ および
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^a}{2} \cdot e^{-x} \right) = +\infty$. また $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$ なので, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$ である.

(2) 関数 $h(x)$ の導関数は $h'(x) = \frac{e^{x-a} - e^{-x+a}}{2} - 1$ である. したがって, C と L が接することは,

$$f(t) = g(t) \iff h(t) = \frac{e^{t-a} + e^{-t+a}}{2} - t + b = 0 \quad (\text{A})$$

かつ

$$f'(t) = g'(t) \iff h'(t) = \frac{e^{t-a} - e^{-t+a}}{2} - 1 = 0 \quad (\text{B})$$

をみたす実数 t が存在することと必要十分である.

$$(\text{B}) \iff e^{2t} - 2e^a \cdot e^t - e^{2a} = 0$$

なので, $p = e^t$ とおくと 2 次方程式

$$p^2 - 2e^a p - e^{2a} = 0$$

を得る. この 2 次方程式の解は $p = (1 \pm \sqrt{2})e^a$ であるが, 特に $p = e^t > 0$ なので, $p = e^t = (1 + \sqrt{2})e^a$ である. よって, $t = a + \log(1 + \sqrt{2})$ である. これを (A) に代入すると, $e^{t-a} = (1 + \sqrt{2})$ に注意すれば,

$$\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{2} + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \right) - \left(a + \log(1 + \sqrt{2}) \right) + b = 0$$

である. したがって,

$$a = b + \sqrt{2} - \log(1 + \sqrt{2}) \quad (\text{C})$$

を得る. このとき C は L に接するので, (C) が求める条件である.

- (3) 求める条件は, $h(x) = 0$ が相異なる 2 つの実解をもつことと必要十分である.
(2) より,

$$h'(x) = 0 \iff e^x = (1 + \sqrt{2})e^a \iff x = a + \log(1 + \sqrt{2})$$

である. $h''(x) = \frac{e^{x-a} + e^{-x+a}}{2} > 0$ であるから, 導関数 $h'(x)$ は単調増加. したがって, $x < a + \log(1 + \sqrt{2})$ のとき $h'(x) < 0$ であり, $a + \log(1 + \sqrt{2}) < x$ のとき $h'(x) > 0$ である. 関数 $h(x)$ の増減表は表 1 のようになる.

表 1: $h(x)$ の増減表

x	$-\infty$		$a + \log(1 + \sqrt{2})$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	極小かつ最小	$\nearrow$	$+\infty$

よって, 最小値

$$h\left(a + \log(1 + \sqrt{2})\right) = \sqrt{2} - \log(1 + \sqrt{2}) - a + b$$

が負であれば中間値の定理より $h(x) = 0$ は相異なる 2 つの実数解をもち, 負でなければ高々 1 つの実数解しかもたない. ゆえに, 求める条件は

$$\sqrt{2} - \log(1 + \sqrt{2}) - a + b < 0 \iff a > b + \sqrt{2} - \log(1 + \sqrt{2})$$

である.

[4]

- (1) $\theta = \frac{\pi}{2}$ より, 点 P の座標は $(x, y) = (r, \cos^2 r + \cos r + 1)$ で与えられる.
従って xy 平面上においてその軌跡は関数

$$f(x) = \cos^2 x + \cos x + 1$$

のグラフのうち $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で描かれる曲線である.

$$f'(x) = -2 \cos x \sin x - \sin x = -\sin x(2 \cos x + 1)$$

より,

$$f'(x) = 0$$

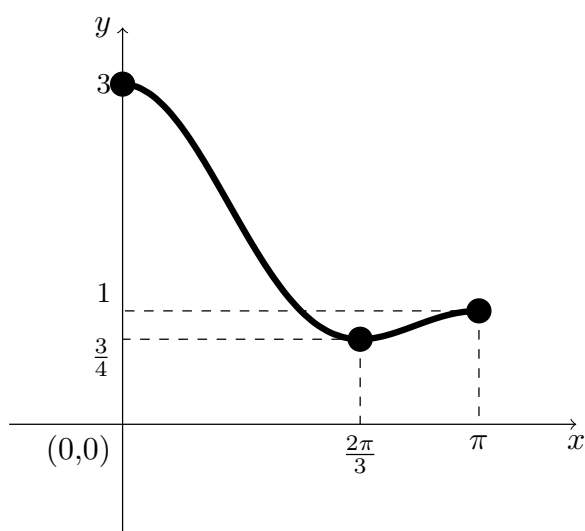
$$\iff \sin x = 0 \text{ または } \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\iff x = 0, \frac{2}{3}\pi, \pi.$$

よってその増減表は

x	0	...	$\frac{2\pi}{3}$	...	π
$f'(x)$	0	-	0	+	0
$f(x)$	3	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1

となる. 従って求める曲線の概形は, 以下の図の通り.



- (2) 各 r において, r を固定し θ を変化させる事を考える. このとき点 P の y 座標は変数 θ についての関数 $g(\theta) = (\cos^2 r + \cos r) \sin \theta + 1$ で与えられる.

$\frac{\pi}{4} \leq r \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $\cos r \geq 0$ であるから, $\cos^2 r + \cos r \geq 0$. また $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ において $\sin \theta$ は単調に増加する.

従って $g(\theta) = (\cos^2 r + \cos r) \sin \theta + 1$ は $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ において減少することがなく $g(\frac{\pi}{6}) \leq g(\theta) \leq g(\frac{\pi}{4})$ が成立する. よって各 r において点 P の軌跡は2点 $(r, g(\frac{\pi}{4})), (r, g(\frac{\pi}{6}))$ を結ぶ線分となる (ただし $r = \frac{\pi}{2}$ の時は1点 $(\frac{\pi}{2}, 1)$).
今, r は $\frac{\pi}{4} \leq r \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で変化するので, 求める領域の面積は

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(g\left(\frac{\pi}{4}\right) - g\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) dr &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right) (\cos^2 r + \cos r) dr \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} (1 + \cos 2r) + \cos r \right) dr \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} \right) \left[\frac{1}{2} r + \frac{1}{4} \sin 2r + \sin r \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} \right) \left(\left(\frac{\pi}{4} + 1 \right) - \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{16} (\sqrt{2}-1) (\pi + 6 - 4\sqrt{2}) \end{aligned}$$

となる.