令和６（2024）年度入学試験問題（前期）

数　　　　学

注　　意

1. 合図があるまで問題冊子をあけないこと。
2. この問題冊子は 10 ページあり、問題は全部で４題ある。【 〔１〕,〔２〕、〔３〕,〔４〕の４題 】
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気づいた場合は、手を高く上げて監督者に知らせること。
4. 解答は解答用紙の問題番号より下に記入すること。
5. 問題冊子の余白および裏表紙は計算に使用できる。
6. 受験票は机上に出しておくこと。

（このページは計算に使用する）

（このページは計算に使用する）

〔１〕

$$a_1=2\ ,\ a_{n+1}=\frac{2a_n+5}{a_n+2}\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ について, 次の問いに答えよ。

（１）すべての自然数 n に対し, $a_n \geqq 2$ であることを示せ。

（２）ある自然数 n に対して, $a_n < \sqrt{5}$ ならば $a_{n+1} > \sqrt{5}$,

また, $a_n > \sqrt{5}$ ならば $a_{n+1} < \sqrt{5}$ であることを示せ。

（３） すべての自然数 n に対し,

$$|a_{n+1}-\sqrt{5}| \leqq \frac{\sqrt{5}-2}{4}|a_n-\sqrt{5}|$$

であることを示せ。

（４） $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

（このページは計算に使用する）

〔２〕

座標空間に点 $A(2,1,3)$ と点 $B(1,3,4)$ があり,また zx 平面上を動く点 P と yz 平面上を動く点 Q がある。次の問いに答えよ。ただし設問（１）は結果のみ解答せよ。

（１） 線分の長さの和 $AP+BP$ の最小値を求めよ。
　　また和が最小になるときの点 P の座標を求めよ。

（２）３つの線分の長さの和 $AP+PQ+BQ$ の最小値を求めよ。
　　また和が最小となるときの点 P, 点 Q の座標を求めよ。

（このページは計算に使用する）

〔3〕

e は自然対数の底とし，a, b は実数定数とする。座標平面内の曲線

$$C:\ y=f(x)=\frac{e^{x-a}+e^{-x+a}}{2}+b$$

および直線

$$L:\ y=g(x)=x$$

について，次の問いに答えよ。

（1） $h(x)=f(x)-g(x)$ とおく。極限 $\lim_{x\to\infty}h(x)$ と $\lim_{x\to-\infty}h(x)$ を求めよ。

必要ならば，$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ が成り立つことを用いてよい。

（2） C と L が接するための a, b の条件を求めよ。

（3） C と L が相異なる 2 点で交わるための a, b の条件を求めよ。

（このページは計算に使用する）

〔 4 〕

xy 平面上で点 $P(x, y)$ は，

$$x = r, \quad y = \sin\theta\cos^2 r + \sin\theta\cos r + 1$$

を満たしながら動くものとする。 r, θ は実数として，次の問いに答えよ。

（1） $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ かつ $0 \leqq r \leqq \pi$ を満たしながら r が変化するとき，

点 P の描く曲線を求め図示せよ。

（2） $\dfrac{\pi}{4} \leqq r \leqq \dfrac{\pi}{2}$ かつ $\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ を満たしながら r, θ が変化するとき，

点 P が動く領域の面積を求めよ。

（このページは計算に使用する）